



# Compacts dénombrables et dérivée de Cantor

Cédric Milliet

## ► To cite this version:

| Cédric Milliet. Compacts dénombrables et dérivée de Cantor. 2009. hal-00400704

**HAL Id: hal-00400704**

**<https://hal.science/hal-00400704>**

Preprint submitted on 1 Jul 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# COMPACTS DÉNOMBRABLES ET DÉRIVÉE DE CANTOR

CÉDRIC MILLIET

RÉSUMÉ. Une application  $f$  continue et ouverte, surjective à fibres finies préserve le rang de Cantor. Si son domaine de départ est un compact, les variations du degré de Cantor sont bornées par la taille maximale des fibres. Si les fibres sont infinies, les variations du rang de Cantor sont bornées par le maximum et minimum des rangs des fibres. Un préordre fermé sur un compact dénombrable est l'intersection de préordres ouverts fermés. Nous calculons le rang de Cantor d'un produit cartésien et présentons un semi anneau dans lequel la dérivée de Cantor est une dérivée.

La dérivée de Cantor a été introduite par Georg Cantor en 1872 pour dériver les ensembles de convergence de séries trigonométriques [1]. En Théorie des Modèles, presque cent ans plus tard, le rang de Cantor-Bendixson a donné naissance au rang de Morley des théories  $\omega$ -stables [6] et au rang de Cantor des théories menues. Nous précisons quelques propriétés de ce rang, bien connues des logiciens lorsqu'elles concernent le rang de Morley. Nous remarquons d'abord que les dérivées de Cantor d'une somme et d'un produit cartésien se comportent bien. Une surjection  $f$  continue et ouverte préserve le rang de Cantor dès lors que ses fibres sont finies. De plus, si le domaine de  $f$  est un espace compact, les variations du degré de Cantor sont bornées par la plus grande taille des fibres. Si les fibres sont infinies, il y a tout de même des inégalités mettant en jeu le maximum et minimum des rangs des fibres. Grâce au rang de Cantor, on peut montrer d'un préordre fermé sur un compact dénombrable qu'il est l'intersection de préordres ouverts fermés. Cela avait été presque remarqué dans [7, 4]. Nous présentons un semi anneau intègre partiellement ordonné dans lequel la dérivée de Cantor est vraiment un opérateur de dérivation. Nous regardons quand ce semi anneau peut être muni d'une structure de treillis. Nous finissons en appliquant les premiers résultats aux théories du premier ordre qui ont un nombre dénombrable de types, et donnons une nouvelle preuve d'un théorème de [5] qui permet de calculer les rang et degré de Cantor sur un paramètre algébrique.

---

*Sujets mathématiques dont il est question.* 03C5O, 03C07, 54A05, 54B99, 54D30, 54F65.

*Mots clefs.* Rang de Cantor-Bendixson, dérivée de Cantor, compact dénombrable, préordre, théorie menue.

La plupart des choses dites dans les sections 1 et 2 sont sûrement bien connues. Je n'ai toutefois pu trouver de référence, mis à part [3]. La proposition 5, le théorème 14, la proposition 16, les sections 3, 4 et la plus grande partie de 5 semblent nouveaux.

## 1. RANG D'UN POLONAIIS DÉNOMBRABLE

Soit  $X$  un espace topologique séparé. Nous notons  $A^c$  pour le complémentaire d'un ensemble  $A$  dans  $X$ . Un point de  $X$  est *isolé* si c'est un ouvert de  $X$ . Dans le cas contraire, c'est un *point d'accumulation*. Nous noterons  $X'$  l'espace dérivé de  $X$ , c'est-à-dire l'ensemble de tous ses points d'accumulation, muni de sa topologie induite. C'est un fermé de  $X$ . L'espace  $X$  est *parfait* s'il n'a pas de points isolés. On définit une suite décroissante de fermés  $X^\alpha$  par induction sur  $\alpha$  :

$$X^0 = X$$

$$X^{\alpha+1} = (X^\alpha)' \text{ pour un ordinal successeur}$$

$$X^\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} X^\alpha \text{ pour un ordinal limite } \lambda$$

On appelle *noyau parfait* de  $X$  l'intersection des  $X^\alpha$  quand  $\alpha$  parcourt les ordinaux. On le note  $X^\infty$ . Un *espace polonais* est un espace séparable métrisable et complet. Nous renvoyons à [3] pour plus de détails sur les polonais. Les espaces polonais peuvent être coupés en un noyau parfait et un reste dénombrable, d'après le théorème de Cantor-Bendixson :

**Théorème 1.** (*Cantor Bendixson*) *Soit  $X$  un espace polonais. Il existe une unique décomposition de  $X$  du type  $P \cup C$  où  $P$  est un sous-ensemble parfait, et  $C$  un ouvert dénombrable.*

Si  $X$  est polonais dénombrable, son noyau parfait est donc vide. On dit que  $X$  est *rangé* par le rang de Cantor-Bendixson, et on appelle *rang de Cantor-Bendixson* de  $X$  le plus petit ordinal  $\beta$  tel que  $X^\beta$  soit vide. Si  $T$  désigne la topologie de  $X$ , on note  $CB(X, T)$  le rang de  $X$ , ou simplement  $CB(X)$  si la topologie n'est pas ambiguë. Pour tout  $x$  dans  $X$ , on définit le *rang de Cantor-Bendixson* de  $x$ , noté  $CB(x, X)$ , ou  $CB(x)$ , par l'ordinal maximal  $\alpha$  tel que  $X^\alpha$  contienne  $x$ . On a donc

$$CB(X) = \sup\{CB(x) : x \in X\}$$

On remarque que le rang de  $x$  est au moins  $\alpha + 1$  si et seulement si  $x$  est point d'accumulation d'éléments de rang au moins  $\alpha$ . D'autre part,  $x$  est isolé des points de rang supérieur. On définit le *rang de Cantor*  $CB(O)$  de tout ouvert  $O$  de  $X$  comme le rang de Cantor de l'espace topologique  $O$  muni de la topologie induite par  $X$ . On a alors

$$CB(x) = \min\{CB(O) : x \in O, O \text{ ouvert}\}$$

*Démonstration.* Soit  $\alpha$  le rang de  $x$ . Un ouvert  $O$  isole  $x$  des points de rang supérieur, donc  $O^{\alpha+1}$  est vide. Réciproquement, on montre par induction sur  $\alpha$  que si  $X^\alpha$  contient  $x$ , alors, si  $O$  est un ouvert contenant  $x$ ,  $O^\alpha$  contient  $x$  également. Si  $X^{\alpha+1}$  contient  $x$ , ce dernier est point d'accumulation de points de  $X^\alpha$ . Si  $x$  n'est pas point d'accumulation de points de  $O^\alpha$ , il est point d'accumulation de points de  $O^{c\alpha}$ , qui est un fermé de  $X$ , donc  $x$  est dans  $O^c$ , absurde.  $\square$

Le rang d'un point  $x$  ne dépend donc pas du voisinage de  $x$  dans lequel on le calcule. On le note désormais  $CB(x)$ . Remarquez que plus la topologie est fine, plus le rang diminue :

**Proposition 2.** *Soit  $X$  un ensemble,  $T_1 \subset T_2$  deux topologies sur  $X$ . Alors  $CB(X, T_1)$  est plus petit que  $CB(X, T_2)$ .*

Etant donnée une famille d'espaces topologiques  $A_i$  indexée par  $I$ , on note  $\bigoplus_I A_i$  leur *somme directe*, c'est-à-dire leur union disjointe munie de la topologie définie comme suit : un ensemble est un ouvert de  $\bigoplus_I A_i$  si sa trace sur chaque  $A_i$  est ouverte dans  $A_i$ . Rappelons que tout ordinal s'écrit de manière unique sous la forme  $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$  où  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  est une chaîne strictement décroissante d'ordinaux, et  $n_1, \dots, n_k$  sont des entiers. On appelle cette écriture la *forme normale de Cantor*. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux ordinaux de formes normales respectives  $\omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot m_k$  et  $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$ , leur *somme de Cantor*  $\alpha \oplus \beta$  est définie par :

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\alpha_1} \cdot (m_1 + n_1) + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot (m_k + n_k)$$

Voir [2] pour de plus amples détails. Calculons maintenant la dérivée et le rang d'une union, d'une somme directe et d'un produit cartésien d'espaces topologiques :

**Proposition 3.** *Soient  $A$  et  $B$  des parties d'un espace topologique  $X$ .*

- 1) *Si  $A \subset B$ ,  $A' \subset B'$ , et  $CB(A) \leq CB(B)$ .*
- 2)  *$(A \cup B)^\alpha = A^\alpha \cup B^\alpha$  pour tout ordinal  $\alpha$ .*
- 3)  *$CB(A \cup B) = \max\{CB(A), CB(B)\}$*

*Démonstration.* 1) Si  $x$  est isolé dans  $B$ , il l'est dans  $A$  par le même ouvert. 2) D'après 1), on a  $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$ . Réciproquement, si  $U$  et  $V$  isolent  $x$  dans  $A$  et  $B$  respectivement,  $U \cap V$  isole  $x$  dans  $A \cup B$ , et  $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ . Puis par induction sur  $\alpha$ .  $\square$

**Proposition 4.** *Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques.*

- 1)  *$(\bigoplus_{i \in I} A_i)^\alpha = \bigoplus_{i \in I} A_i^\alpha$  pour tout ordinal  $\alpha$ .*
- 2)  *$CB(\bigoplus_{i \in I} A_i) = \sup\{CB(A_i) : i \in I\}$*

*Démonstration.* 1) D'après la proposition précédente, on a  $\bigoplus_{i \in I} A'_i \subset (\bigoplus A_i)'$ . Réciproquement, si  $x$  est un point d'accumulation dans  $\bigoplus_{i \in I} A_i$ , il appartient à un unique  $A_i$  dans lequel il ne peut être isolé. Puis, par induction sur  $\alpha$ . 2) Découle de 1).  $\square$

**Proposition 5.** *Soient  $A$  et  $B$  deux espaces topologiques non vides.*

$$1) (A \times B)^\alpha = \bigcup_{\beta \oplus \gamma = \alpha} A^\beta \times B^\gamma \text{ pour tout ordinal } \alpha.$$

$$2) CB(A) \oplus CB(B) \leq CB(A \times B) + 1 \leq CB(A) \oplus CB(B) + 1$$

*Démonstration.* 1) Si  $a$  est isolé dans  $A$ , et  $b$  dans  $B$ , alors  $(a, b)$  est isolé dans  $A \times B$ , donc  $(A \times B)^c \supset A^c \times B^c$ . Réciproquement, si  $(a, b)$  est isolé dans  $A \times B$ , alors il existe un couple d'ouverts  $U$  et  $V$  de  $A$  et  $B$  respectivement tel que  $U \times V$  isole  $(a, b)$ . En particulier,  $U$  isole  $a$  et  $V$  isole  $b$ , donc  $(A \times B)^c \subset A^c \times B^c$ . On a donc

$$(A \times B)' = A' \times B \cup A \times B'$$

Puis par induction, supposons que, pour tout ordinal  $\alpha$ , on ait

$$(A \times B)^\alpha = \bigcup_{\beta \oplus \gamma = \alpha} A^\beta \times B^\gamma$$

Remarquons que l'union est une union finie. On a alors

$$(A \times B)^{\alpha+1} = \left( \bigcup_{\beta \oplus \gamma = \alpha} A^\beta \times B^\gamma \right)' = \bigcup_{\beta \oplus \gamma = \alpha} (A^\beta \times B^\gamma)'$$

$$\bigcup_{\beta \oplus \gamma = \alpha} (A^{\beta+1} \times B^\gamma \cup A^\beta \times B^{\gamma+1}) = \bigcup_{\beta \oplus \gamma = \alpha+1} A^\beta \times B^\gamma$$

$\square$

Les surjections continues et ouvertes dont les fibres sont finies préservent le rang de Cantor :

**Proposition 6.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques, et  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ . Alors,*

1) *Si  $f$  est ouverte et surjective,  $CB(X) \geq CB(Y)$ .*

2) *Si  $f$  est continue à fibres finies,  $CB(X) \leq CB(Y)$ .*

*Démonstration.* 1) Montrons que  $f^{-1}(Y') \subset f^{-1}(Y)'$ . Soit  $y$  un point d'accumulation dans  $Y$  et  $x$  un antécédent  $y$ . Pour tout voisinage  $O$  de  $x$ ,  $f(O)$  est un voisinage infini de  $y$ , donc  $O$  est infini. Par induction, on a donc  $f^{-1}(Y^\alpha) \subset f^{-1}(Y)^\alpha$ . Puisque  $f$  est surjective, on a  $Y^\alpha \subset f(X^\alpha)$ . 2) Soit  $x$  est un point d'accumulation dans  $X$  et  $O$  un voisinage de  $f(x)$ . Le voisinage  $f^{-1}(O)$  de  $x$  est infini, donc  $f(f^{-1}(O))$ , et  $O$  sont infinis. Par induction sur  $\alpha$ , on a  $f(X^\alpha) \subset f(X)^\alpha$ .  $\square$

## 2. DEGRÉ D'UN COMPACT DÉNOMBRABLE

Si  $X$  est un compact dénombrable, son rang est un ordinal successeur  $\alpha + 1$ , et on note  $CB^*(X)$  pour  $\alpha$ . De plus, l'ensemble  $X^\alpha$  est fini ; on appelle *degré de Cantor* de  $X$  son cardinal, noté  $dCB(X)$ . Parmi les polonais dénombrables, le degré de Cantor caractérise les compacts :

**Proposition 7.** *Soit  $X$  un espace topologique séparé rangé par le rang de Cantor. Si tout fermé de  $X$  a un degré de Cantor fini,  $X$  est compact.*

*Démonstration.* Soit  $(F_j)_{j \in J}$  une famille de fermés d'intersection vide. Parmi toutes les intersections finies de  $F_j$ , on en choisit une, notée  $I$ , de rang et de degré minimaux. Si  $I$  n'est pas vide, il existe dans  $I$  un  $x$  de rang maximal. Puisque  $\bigcap_{j \in J} F_j$  est vide, il existe un  $F_j$  ne contenant pas  $x$ , et le rang ou le degré de  $I \cap F_j$  baisse.  $\square$

**Corollaire 8.** *Soit  $X$  un espace topologique séparé à base dénombrable d'ouverts.  $X$  est rangé par le rang de Cantor et tous ses fermés ont un degré de Cantor fini si et seulement si  $X$  est un compact dénombrable.*

*Démonstration.* Si tous les fermés de  $X$  ont un degré de Cantor,  $X$  est compact. Puisque  $X$  est rangé par le rang de Cantor,  $X$  s'injecte dans l'ensemble de ses ouverts de base.  $\square$

**Corollaire 9.** *Si  $A$  et  $B$  sont deux compacts, alors*

$$CB^*(A \times B) = CB^*(A) \oplus CB^*(B)$$

*Remarque 10.* Il est facile de fabriquer un espace topologique de rang  $\alpha$  pour tout ordinal  $\alpha$ . Soit  $X_1$  le sous-ensemble de  $\mathbf{Q}$  constitué des fractions  $1/n$  et de zéro.  $X_1$  n'a qu'un point d'accumulation : il est de rang  $CB^*$  un. Supposons  $X_\alpha$  de rang  $\alpha$  construit. Si  $\alpha$  est le successeur d'un successeur, on pose  $X_{\alpha+1}$  le produit  $X_\alpha \times X_1$ . Pour un ordinal limite  $\lambda$ , on pose  $X_\lambda$  la somme  $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ , qui est localement compacte, et  $X_{\lambda+1}$  le compactifié d'Alexandroff de  $X_\lambda$ . Remarquons que  $X_\alpha$  a le cardinal de  $\alpha$ .

Calculons les degrés d'une union disjointe et d'un produit cartésien :

**Proposition 11.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $A$  et  $B$  deux ensembles disjoints dans  $X$  de même rang de Cantor. Alors,*

- 1)  $dCB(A \cup B) = dCB(A) + dCB(B)$
- 2)  $dCB(X \times Y) = dCB(X) \cdot dCB(Y)$

*Démonstration.* 1) Soit  $\alpha$  le rang de  $A$ .  $A^\alpha$  et  $B^\alpha$  sont disjoints, donc

$$dCB(A \cup B) = |A^\alpha \cup B^\alpha| = |A^\alpha| + |B^\alpha|$$

2) Soit  $\alpha$  le rang de Cantor de  $X$ ,  $\beta$  celui de  $Y$ . On a

$$dCB(X \times Y) = \left| \bigcup_{\gamma \oplus \delta = \alpha \oplus \beta} X^\gamma \times Y^\delta \right| = |X^\alpha \times Y^\beta| = |X^\alpha| \cdot |Y^\beta|$$

$\square$

Dans un espace compact, le rang et le degré de Cantor se caractérisent de la manière suivante, bien connue des logiciens :

**Proposition 12.** *Soit  $X$  un compact dénombrable.*

- 1)  $CB(X) \geq \alpha + 1$  si et seulement s'il existe une suite d'ouverts  $(O_i)_{i \geq 1}$  de rang au moins  $\alpha$  avec  $CB(O_i \cap O_j) < \alpha$  pour tout  $i \neq j$ .
- 2) Le degré de  $X$  est le plus grand nombre  $d$  d'ouverts  $O_1, \dots, O_d$  de rang  $CB(X)$  avec  $CB(O_i \cap O_j) < CB(X)$  pour tout  $i \neq j$ .

*Démonstration.* 1) Soit  $(O_i)_{i \geq 1}$  une suite d'ouverts de rang au moins  $\alpha$  avec  $CB(O_i \cap O_j) < \alpha$  pour tout  $i \neq j$ . Les  $O_i^\alpha$  sont non vides et deux-à-deux disjoints, donc  $X^\alpha$  est infini, et contient un point d'accumulation. Réciproquement, si  $X^{\alpha+1}$  n'est pas vide,  $X^\alpha$  a une infinité de points  $x_i$  isolés par un ouvert  $O_i$  respectivement. On a  $CB(O_i) \geq \alpha$ , et  $CB(O_i \cap O_j) < \alpha$  pour tout  $i \neq j$ .

2) Soient  $O_1, \dots, O_d$  des ouverts de  $X$  de rang  $\alpha$  et d'intersections deux-à-deux petites. Les  $O_i^\alpha$  sont deux-à-deux disjoints et non vides donc  $d \leq dCB(X)$ . Réciproquement, soit  $x_1, \dots, x_d$  une énumération de  $X^\alpha$ . On peut trouver des ouverts  $O_i$  contenant respectivement  $x_i$  mais aucun des  $x_j$  pour  $j \neq i$ . En particulier,  $CB(O_i \cap O_j) < \alpha$ .  $O_i^\alpha$  contient  $x_i$ , donc  $CB(O_i) \geq \alpha$ .  $\square$

*Remarque 13.* Si  $X$  est un compact dénombrable,  $X$  est métrisable et possède une base d'ouverts constituée de fermés. Quitte à remplacer chaque  $O_i$  de la proposition précédente par un ouvert de base inclus dans  $O_i$ , ce qui ne change pas le rang de Cantor des  $O_i$ , on peut supposer les  $O_i$  ouverts et fermés. Quitte à remplacer inductivement chaque  $O_i$  par l'ouvert fermé  $O_i \setminus (O_i \cap \bigcup_{j < i} O_j)$ , ce qui ne change pas le rang des  $O_i$ , on peut supposer que les  $O_i$  sont deux-à-deux disjoints.

Nous avons vu qu'une surjection ouverte et continue à fibres finies préserve le rang. Mieux : on peut borner les variations du degré.

**Théorème 14.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces compacts. Si  $f$  est une application de  $X$  dans  $Y$ , continue, ouverte, et surjective à fibres finies de cardinal au plus un entier  $n$ , alors  $X$  et  $Y$  ont même rang et*

$$dCB(Y) \leq dCB(X) \leq n \cdot dCB(Y)$$

*Démonstration.* Si  $O_1, \dots, O_d$  sont  $d$  ouverts de  $Y$  de rang maximal et d'intersections deux-à-deux petites, les ouverts  $f^{-1}(O_1), \dots, f^{-1}(O_d)$  de  $X$  ont même rang que  $X$  et leurs intersections sont deux-à-deux petites, donc  $dCB(X) \geq dCB(Y)$ . Réciproquement, soit  $d$  le degré de  $Y$ , et  $O_0, \dots, O_{d \cdot n}$  une suite de  $d \cdot n + 1$  ouverts de  $X$  de rang maximum et d'intersections deux à deux petites. Pour tout ensemble  $I$  de  $[0, d \cdot n]$  de cardinal au moins  $n + 1$ , l'intersection  $\bigcap_{i \in I} f(O_i^\alpha)$  est vide, donc il existe  $d + 1$  sous-ensembles deux-à-deux disjoints  $I_0, \dots, I_d$  de  $[0, d \cdot n]$  tels que  $\bigcap_{i \in I_j} f(O_i^\alpha)$  ne soit vide pour aucun  $j$ , et  $I_j$  soit maximal vérifiant cette propriété. Ecrivons  $V_j$  pour  $\bigcap_{i \in I_j} f(O_i)$ . Mais

alors, pour tout  $j$  dans  $[0, d]$ , chaque  $V_j$  est un ouvert de  $Y$ , de même rang de Cantor que  $Y$ , et  $V_j \cap V_k$  est de petit rang pour  $k \neq j$ , ce qui contredit le fait que  $Y$  soit de degré  $d$ .  $\square$

Soit  $X$  un espace topologique et  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Pour toute partie  $A$  de  $X$ , on note  $R^{-1}(A)$  la réunion des classes de  $R$  qui coupent  $A$ . On dit que  $R$  est *continue* si pour tout ouvert  $O$  de  $X$ ,  $R^{-1}(O)$  est un ouvert de  $X$ . Rappelons que  $R$  est continue si et seulement si l'application quotient de  $X$  dans  $X/R$  est ouverte.

**Corollaire 15.** *Soit  $X$  un espace compact et  $R$  une relation d'équivalence continue sur  $X$ , dont toutes les classes sont finies. Alors,*

$$1) \quad CB(X) = CB(X/R)$$

2) *Si les classes de  $R$  ont au plus  $n$  éléments,*

$$dCB(X) \leq dCB(X/R) \leq n \cdot dCB(X)$$

*Démonstration.* L'application quotient est continue, ouverte à fibres finies de taille au plus  $n$ .  $\square$

**Proposition 16.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces compacts, et  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ . Alors,*

1) *Si  $f$  est ouverte, surjective, à fibres de rang  $CB^*$  au moins  $\alpha$ ,*

$$CB(X) \geq \alpha + CB(Y)$$

2) *Si  $f$  est continue à fibres de rang  $CB^*$  au plus  $\alpha$ ,*

$$\alpha + CB(Y) \geq CB(X)$$

*Démonstration.* 1) On montre que  $f(X)^\beta \subset f(X^{\alpha+\beta})$  pour tout  $\beta$ .  $X$  est la réunion de ses fibres  $F_i$ , et  $\bigcup F_i^\alpha \subset X^\alpha$ , donc  $f(X) = f(X^\alpha)$ . On a montré dans la proposition 6 que  $f(X)^\beta \subset f(X^\beta)$  pour tout  $\beta$ . On a donc

$$f(X)^\beta = f(X^\alpha)^\beta \subset f((X^\alpha)^\beta) = f(X^{\alpha+\beta})$$

2) On montre que  $f(X^{\alpha+\beta}) \subset f(X)^\beta$  pour tout  $\beta$ . La restriction à  $X^\alpha$  de  $f$  est continue à fibres finies, et

$$f(X^{\alpha+\beta}) = f((X^\alpha)^\beta) \subset f(X^\alpha)^\beta$$

$\square$

### 3. PRÉORDRE FERMÉ DANS UN COMPACT DÉNOMBRABLE

Soit  $X$  un espace topologique et  $R$  une relation binaire sur  $X$ . On dit que  $R$  est *fermée*, respectivement *ouverte*, *ouvert-fermée* si l'ensemble des couples en relation par  $R$  est un fermé, respectivement un ouvert, un ouvert-fermé de  $X \times X$ . Remarquez qu'une relation d'équivalence ouverte est continue. Un *préordre* sur  $X$  est une relation binaire réflexive et transitive. La proposition suivante s'inspire de [4].



**Proposition 17.** *Soit  $X$  un compact dénombrable, et  $R$  un préordre fermé sur  $X$ . Alors  $R$  est une intersection de préordres ouvert-fermés.*

*Démonstration.*  $X$  a une base d'ouverts fermés. On pose  $F$  l'ensemble fermé des couples de  $X \times X$  en relation par  $R$ . Si  $x$  et  $y$  ne sont pas en relation, il existe un ouvert de base  $O_1 \times O_2$  de  $X \times X$  contenant  $(x, y)$  et inclus dans  $F^c$ ; l'intersection  $O_1 \cap O_2$  est vide puisque  $R$  est réflexive. On choisit  $O_1$  et  $O_2$  de sorte que  $(O_1 \cup O_2)^c$  soit de rang et degré de Cantor minimaux, et on pose  $Y$  l'ensemble  $(O_1 \cup O_2)^c$ . Montrons que  $Y$  est vide; sinon, prenons un  $y$  dans  $Y$  de rang maximal. Si  $(O_1 \times \{y\}) \cap F$  et  $(\{y\} \times O_2) \cap F$  sont tous deux non vides, comme  $R$  est transitive,  $(O_1 \times O_2) \cap F$  est non vide, ce qui est absurde. On peut donc supposer  $(O_1 \times \{y\}) \cap F$  vide. L'ensemble  $(O_1 \times \{y\})$  est dans l'ouvert  $F^c$ . On peut trouver un ouvert de base  $Q_2$  contenant  $y$  avec  $O_1 \times Q_2 \subset F$ . Mais  $O_1 \times (Q_2 \cup O_2)$  est inclus dans  $F^c$ . L'ensemble  $(O_1 \cup O_2 \cup Q_2)^c$  est égal à  $X^c \cap Q_2^c$  et ne contient pas  $y$ , ce qui contredit le caractère minimal du degré de Cantor de  $Y$ . Donc  $Y$  est vide et  $O_1 \cup O_2$  est  $X$  tout entier. Alors  $O_1 \times O_1^c \subset F^c$ , donc  $F \subset (X \times O_1) \cup (O_1^c \times X)$ , et  $aRb$  implique  $aR_{x,y}b$  où  $R_{x,y}$  est un préordre défini par

$$aR_{x,y}b \iff (a \in O_1 \Rightarrow b \in O_1)$$

On a montré que  $aRb$  est équivalent à  $\bigwedge_{x,y \in F^c} aR_{x,y}b$ . □

#### 4. A PROPOS DE LA DÉRIVÉE DE CANTOR

Soit  $X$  un espace topologique séparé et  $2^X$  l'ensemble de ses parties. Muni de l'union,  $2^X$  est un demi-groupe. D'après la proposition 3, l'application qui à un sous-ensemble de  $X$  associe son espace dérivé est linéaire. Si  $2^X$  était stable par produit cartésien, la proposition 5 serait une formule de Leibniz. Rappelons que les notions de point d'accumulation et d'espace dérivé ont été introduites par Cantor pour dériver les ensembles de convergence de séries trigonométriques [1]. Cantor les appelait respectivement *Grenzpunkt* et *abgeleitete Punktmenge*, et utilisait les notations  $P'$  ou  $P^{(1)}$  pour la première dérivée d'un ensemble de points. Nous ignorons s'il avait en tête une formule de Leibniz. Toujours est-il que la dérivée de Cantor porte bien son nom puisque, quotientée par une certaine relation d'équivalence, la classe des espaces topologiques est un semi-anneau dans lequel la dérivée de Cantor est un opérateur de dérivation.

On appelle  $\omega$ -*plongement* une application ouverte et continue à fibres finies entre deux espaces topologiques. Nous notons  $\mathcal{Top}_\omega$  la catégorie des espaces topologiques dont les flèches sont les  $\omega$ -plongements. Elle est partiellement ordonnée par la relation

$$A \leq B \text{ s'il existe un } \omega\text{-plongement de } A \text{ dans } B$$

On note  $A \equiv B$  pour dire que  $A \leq B$  et  $B \leq A$ . C'est une relation d'équivalence.

**Proposition 18.** *Soient  $A$  et  $B$  deux espaces topologiques.  $A$  équivalence modulo  $\equiv$  près,  $A \oplus B$  est l'unique plus petit  $C$  tel que  $A \leq C$  et  $B \leq C$ .*

*Démonstration.* Si  $A$  et  $B$  se plongent dans  $C$  via  $f$  et  $g$ , alors  $A \oplus B$  se plonge dans  $C$  via l'application qui à  $a \in A$  associe  $f(a)$  et à  $b \in B$  associe  $g(b)$ . Réciproquement,  $A$  et  $B$  se plongent dans  $A \oplus B$ .  $\square$

On appelle *union topologique* de  $A$  et  $B$  la classe modulo  $\equiv$  de  $A \oplus B$ , que l'on notera  $A \vee B$ . On a donc  $A \vee B \equiv B \vee A$ , et  $A \times B \equiv B \times A$ . Les opérations  $\oplus$  et  $\times$  passent au quotient modulo  $\equiv$  :

**Proposition 19.** *Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois espaces topologiques.*

- 1) *Si  $A \leq B$ , alors  $A \vee C \leq B \vee C$ .*
- 2)  *$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$*
- 3) *Si  $A \leq B$ , alors  $A \times C \leq B \times C$ .*
- 4)  *$A \times (B \vee C) \equiv (A \times B) \vee (A \times C)$*

*Remarque 20.* Si  $A, B \subset X$ , alors  $A \cup B \equiv A \oplus B$ , et  $A \oplus A \equiv A$ .

*Démonstration.* 1)  $B$  et  $C$  se plongent dans  $B \vee C$ , donc  $A$  et  $C$  aussi, et  $A \vee C$  se plonge dans  $B \vee C$ . 2) Par définition de  $\vee$  et de l'associativité du "et" de la langue française. 3) Evident. 4) D'après les points précédents,  $A \times (B \vee C) \equiv A \times (B \oplus C) \equiv (A \times B) \oplus (A \times C) \equiv (A \times B) \vee (A \times C)$   $\square$

Pour tout espace  $A$ , on pose  $D(A)$  le sous-espace de  $A$  privé de ses ouverts finis. Puisque  $A$  est séparé,  $D(A)$  est égal à  $A'$ . L'application  $D$  et ses propriétés passent au quotient modulo  $\equiv$ .

**Proposition 21.** *Soient  $A$  et  $B$  deux espaces topologiques.*

- 1) *Si  $A \leq B$ , alors  $D(A) \leq D(B)$*
- 2)  *$D(A \vee B) \equiv D(A) \vee D(B)$*
- 3)  *$D(A \times B) \equiv (D(A) \times B) \vee (A \times D(B))$*

*Démonstration.* 1) Si  $A$  se plonge dans  $B$  via  $f$ , la restriction de  $f$  à  $A'$  est un  $\omega$ -plongement de  $A'$  dans  $B'$ .

$$2) (A \vee B)' \equiv (A \oplus B)' \equiv A' \oplus B' \equiv A' \vee B'$$

$$3) (A \times B)' \equiv (A' \times B) \cup (A \times B') \equiv (A' \times B) \vee (A \times B') \quad \square$$

**Théorème 22.** *Pour toute sous-classe  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{Top}_\omega$  close par union disjointe et produits cartésiens finis, la classe  $(\mathcal{C}/\equiv, \vee, \times, D, \emptyset)$  est un semi-anneau commutatif, différentiel intègre.*

Si  $\mathcal{C}$  contient un ensemble fini, sa classe modulo  $\equiv$  est une unité.

*Remarque 23.* On appelle *point de condensation* un point dont tout voisinage est indénombrable. L'application qui à un espace topologique associe le sous-espace constitué de ses points de condensation au quotient modulo  $\equiv$ , et définit une dérivée sur  $\mathcal{Top}_\omega/\equiv$ .

On considère à présent les classes  $\mathcal{Pol}_0$  des polonais dénombrables et celle  $\mathcal{K}_0$  des compacts dénombrables.

**Corollaire 24.**  $(\mathcal{P}ol_0 / \equiv, \vee, \times, D)$  est un semi-anneau commutatif différentiel intègre.

**Corollaire 25.** Le rang  $CB^*$  de  $(\mathcal{K}_0 / \equiv, \leq, \vee, \times)$  dans  $(\omega_1, \leq, \sup, \oplus)$  est un morphisme de semi-anneaux ordonnés.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On note  $\leq_{\mathcal{C}}$  le préordre associé à la notion de flèche de  $\mathcal{C}$ , et  $\equiv_{\mathcal{C}}$  la symétrisée du préordre. Soit  $(A_i, f_{ij})_{i \leq j \in I}$  un système inductif. Si elle existe, la limite inductive  $\varinjlim A_i$  est, à équivalence modulo  $\equiv_{\mathcal{C}}$  près, le plus petit majorant des  $A_i$ . Les paragraphes précédents nous ont fourni une notion de borne supérieure compatible avec la somme. Les suivants nous donneront une notion de borne inférieure. Soit une catégorie  $\mathcal{C}$  que l'on suppose munie d'une notion de  $\sup$ , c'est-à-dire que tout ensemble fini de  $\mathcal{C}$  a un unique plus petit majorant pour  $\leq_{\mathcal{C}}$ . On notera  $A \vee B$  le plus petit majorant de  $A$  et  $B$ . On suppose encore que  $\mathcal{C}$  est close par limite projective et limite inductive majorée.

**Proposition 26.** Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{C}$ .  $A$  équivalence modulo  $\equiv_{\mathcal{C}}$  près, il existe un unique plus grand minorant de  $A$  et  $B$ .

*Démonstration.* Appelons  $D$  l'ensemble des minorants de  $A$  et  $B$ , et montrons que  $(D, \leq_{\mathcal{C}})$  est inductif. Soit  $C_i$  une chaîne croissante d'objets se minorant  $A$  et  $B$ . La limite inductive  $\varinjlim C_i$  est un majorant de cette chaîne, qui minore encore  $A$  et  $B$  d'après la propriété universelle de la limite inductive. L'existence découle donc du lemme de Zorn. Pour l'unicité : soient  $C$  et  $C'$  deux plus grands minorants de  $A$  et  $B$ , alors  $C \vee C'$  minore  $A$  et  $B$  puisque  $C \vee C'$  est le plus petit majorant de  $C$  et  $C'$ . Mais  $C$  et  $C'$  minorent tous deux  $C \vee C'$ . On a donc  $C \equiv_{\mathcal{C}} (C \vee C') \equiv_{\mathcal{C}} C'$  par maximalité de  $C$  et  $C'$ .  $\square$

On notera  $A \wedge B$  cet élément.

**Proposition 27.** Soit  $A, B, C$ , et  $D$  quatre éléments de  $\mathcal{C}$

- 1) Si  $A \leq_{\mathcal{C}} C$  et  $B \leq_{\mathcal{C}} D$ , alors  $A \wedge B \leq_{\mathcal{C}} C \wedge D$ .
- 2)  $A \wedge (B \vee C) \equiv_{\mathcal{C}} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 3)  $A \wedge (B \vee C) \geq_{\mathcal{C}} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

*Démonstration.* 1)  $A \wedge B$  se plonge dans  $A$  et dans  $B$ , donc dans  $C$  et  $D$  aussi. Comme  $C \wedge D$  est le plus grand vérifiant cette propriété,  $A \wedge B$  se plonge dans  $C \wedge D$  également.

2) Découle de la définition même de  $\wedge$ .

3) On a  $A \wedge B \leq A$  et  $A \wedge C \leq A$ , donc  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leq A$ . De même,  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leq B \vee C$ . Alors  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leq A \wedge (B \vee C)$ .  $\square$

**Proposition 28.** Supposons le treillis  $(\mathcal{C} / \equiv_{\mathcal{C}}, \leq, \wedge, \vee)$  distributif. Soient  $A \leq_{\mathcal{C}} B$  deux éléments de  $\mathcal{C}$ .  $A$  équivalence modulo  $\equiv_{\mathcal{C}}$  près, il existe un unique plus petit  $C$  tel que  $A \vee C \equiv_{\mathcal{C}} B$ .

*Démonstration.* Montrons que l'ensemble  $D$  des classes  $C$  de  $\mathcal{C}$  modulo  $\equiv_c$  telles que  $A \vee C \geq_c B$  est inductif. Soit  $C_i$  une chaîne décroissante d'éléments de  $\mathcal{C}$  tels que  $A \vee C_i$  se plonge dans  $B$ . La limite projective  $\varprojlim C_i$  est un minorant de cette chaîne, qui appartient à l'ensemble  $D$  d'après la propriété universelle de la limite projective. D'après le lemme de Zorn, il y a donc un plus petit  $C$  pour l'ordre  $\leq_c$  tel que  $A \vee C \geq_c B$ . Montrons l'unicité. Si  $C$  et  $C'$  sont minimaux tels que  $A \vee C \geq B$  et  $A \vee C' \geq_c B$ , alors  $A \vee (C \wedge C') = (A \vee C) \wedge (A \vee C') \geq_c B$ , donc  $C \equiv_c (C \wedge C') \equiv_c C'$  par minimalité de  $C$  et  $C'$ .  $\square$

## 5. RANG D'UN ESPACE DÉNOMBRABLE DE TYPES

Pour finir, nous appliquons les résultats à l'espace des types d'une théorie menue. Soit  $L$  un langage dénombrable,  $T$  une  $L$ -théorie, et  $a$  un uplet fini de paramètres. On note  $S_n(a)$  l'ensemble des  $n$ -types consistant avec  $T$  à paramètres dans  $a$ , muni de la topologie associée à la base d'ouverts  $[\phi(x_1, \dots, x_n)]$  où  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  décrit les formules du langage  $L \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup a$ . C'est un espace compact. On suppose la théorie *menue*, c'est-à-dire que  $S_n(\emptyset)$  est dénombrable pour tout  $n$ . Comme  $a$  est fini,  $S_n(a)$  est dénombrable : à tout type sur  $a$  est associé un rang ordinal noté  $CB_a(p)$ . On appelle *rang de Cantor-Bendixson sur  $a$  d'une formule  $\phi$*  à paramètres dans  $a$ , le rang de Cantor de l'ouvert  $[\phi]$  dans  $S_n(a)$ . Le *degré de Cantor-Bendixson sur  $a$  de  $\phi$*  est le degré de Cantor de  $[\phi]$ . On le note  $dCB_a(\phi)$ . Pour une formule  $\phi$ , on a donc

$$CB(\phi) = \max\{CB(p) : p \in [\phi]\}$$

$$CB(p) = \min\{CB(\psi) : \psi \in p\}$$

Des pages précédentes se déduisent les assertions suivantes, bien connues :

**Proposition 29.** *Soient  $C$  et  $D$  deux parties  $a$ -définissables.*

- 1)  $CB_a(D) < \aleph_1$
- 2) Si  $C \subset D$ , alors  $CB_a(C) \leq CB_a(D)$
- 3)  $CB_a(C \cup D) = \max\{CB_a(C), CB_a(D)\}$
- 4) Si  $C$  et  $D$  ont même rang et sont disjoints,

$$dCB_a(C \cup D) = dCB_a(C) + dCB_a(D)$$

- 5)  $CB_a(D) \geq \alpha + 1$  si et seulement s'il existe une famille infinie d'ensembles  $a$ -définissables dans  $D$  deux-à-deux disjoints de rang au moins  $\alpha$ .
- 6) Le degré de  $D$  est le plus grand nombre  $d$  d'ensembles  $a$ -définissables deux-à-deux disjoints de  $D$  de même rang que  $D$ .

**Proposition 30.** *Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles définissables et  $f$  une application définissable de  $A$  dans  $B$ . Alors  $f$  induit une application  $\tilde{f}$  de  $[A]$  dans  $[B]$  et*

- 1)  $\tilde{f}$  est continue et ouverte.

- 2) Si les fibres de  $f$  sont de taille au plus  $n$ , celles de  $\tilde{f}$  aussi.
- 3) Si  $f$  est surjective,  $\tilde{f}$  l'est aussi.
- 4) Si  $g$  est une application définissable de  $C$  dans  $A$ ,  $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$ .
- 5) Si  $h = id_A$ , alors  $\tilde{h} = id_{[A]}$ .

*Démonstration.* Pour tout type  $p$ , et une réalisation  $a$ , on pose  $\tilde{f}(p)$  égal à  $tp(f(a))$ . Remarquer que  $\tilde{f}(p)$  ne dépend pas de  $a$ . 1) Si  $[D]$  est un ouvert de base de  $[B]$ ,

$$\tilde{f}^{-1}([D]) = \{tp(a) \in [A] : f(a) \in D\} = [f^{-1}(D)]$$

$\tilde{f}$  est donc continue, et ouverte puisque l'espace est compact à base d'ouverts-fermés. 2) Si  $f$  est à fibres de taille  $n$  et si  $f(a)$  et  $f(b)$  ont même type, il existe un automorphisme  $\sigma$  tel que  $f(\sigma(a))$  soit égal à  $f(b)$ , donc  $\sigma(a)$  est dans la fibre de  $f(b)$ .  $\square$

Il existe donc un *foncteur covariant*  $\sim$  de la catégorie des ensembles définissables d'une structure  $M$ , avec les applications définissables pour flèches, dans la catégorie des espaces de types, une sous-catégorie des espaces topologiques, munie des applications bicontinues. Le foncteur  $\sim$  préserve les notions d'applications à fibres finies : il induit un foncteur de la catégorie des ensembles définissables avec les applications définissables à fibres finies pour flèches, dans  $\mathcal{Top}_\omega$ .

**Corollaire 31.** *Soient  $C$  et  $D$  deux ensembles  $a$ -définissables, et  $f$  une application  $a$ -définissable de  $C$  dans  $D$ . Alors,*

- 1) Si  $f$  est surjective,  $CB_a(C) \geq CB_a(D)$ .
- 2) Si  $f$  est à fibres finies,  $CB_a(D) \geq CB_a(C)$ .
- 3) Si  $f$  est surjective à fibres finies de cardinal au plus un entier  $n$ , alors  $C$  et  $D$  ont même rang de Cantor sur  $a$ , et

$$dCB_a(D) \leq dCB_a(C) \leq n \cdot dCB_a(D)$$

**Corollaire 32.** *Soit  $X$  un ensemble définissable sans paramètres, et  $a$  un élément algébrique sur le vide de degré  $n$ , alors*

- 1)  $CB_a(X) = CB_\emptyset(X)$
- 2)  $dCB_\emptyset(X) \leq dCB_a(X) \leq n \cdot dCB_\emptyset(X)$

*Démonstration.* Sur  $S(X, a)$ , la relation "être conjugué sous l'action du groupe d'automorphismes fixant  $a$ ", notée  $R_a$ , est continue. Toutes ses classes sont de cardinal au plus  $n$ . D'autre part,  $S(X, \emptyset)$  et  $S(X, a)/R_a$  sont homéomorphes. On applique alors le corollaire 15.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen **5**, 1, 123–132, 1872.
- [2] T. Jech, *Set theory, the third Millennium Edition*, Springer, 2003.

- [3] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.
- [4] B. Kim, *A Note on Lascar Strong Types in Simple Theories*, The Journal of Symbolic Logic **63**, 3, 1998.
- [5] C. Milliet, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon, 2009.
- [6] M. Morley, *Categoricity in power*, Transactions of the American Mathematical Society **114**, 2, 514–538, 1965.
- [7] A. Pillay et B. Poizat, *Pas d’imaginaires dans l’infini*, The Journal of Symbolic Logic **52**, 2, 400–403, 1987.

*Adresse postale* : Université de Lyon, Université Lyon 1, Institut Camille Jordan  
UMR 5208 CNRS, 43 boulevard du 11 novembre 1918,  
69622 Villeurbanne Cedex, France  
*E-mail address*: `milliet@math.univ-lyon1.fr`